

© VÝROKY

1. Jednoduché výroky a jejich negace

VÝROK - označovací věta, o jejíž pravdivosti či nepravdivosti lze jednoznačně rozhodnout (odlišit, a neboť má smysl otázky, zda je či není pravdivé)

- ozn. $a, b, c, v, \dots$ (nikdy $A, B, C, V, \dots$)

- přičiňujeme mu tzv. PRÁVDIVOSTNÍ HODNOTU (ozn. ph)

- VÝROK PRAVDIVÝ (platí, pravda) $\dots ph = 1$

- NEPRAVDIVÝ $\dots ph = 0$

HYPOTÉZA (DOMNĚNKA): výrok, o jehož pravdivosti či nepravdivosti nemůžeme momentálně rozhodnout (ale principiálně jistě a dle možností nastane)

VÝROKOVÁ FORMA: tvrzení obsahující proměnné, po dosazení na proměnné se stane výrokem (pravdivým, nepravdivým)

Příklady

① Rozhodnutí, zda se jedná o výroky, určitě příp. jejich pravdivostní hodnotu:

v_1 : Vltopříčchy čtverci jsou na sebe kolmé. - výrok, $ph = 1$

v_2 : Číslo 8 je liché. - výrok, $ph = 0$

v_3 : Ve vesmíru existují inteligentní bytosti i mimo Sluneční soustavu. - hypotéza

v_4 : Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí, že $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - výrok, $ph = 1$

v_5 : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - není výrok (nemůžeme říci, co je a, b , pro které hodnoty, nebo rovnost nastává - otázka, zda pravdivé či ne, nemá smysl)

v_6 : $x+3=5$ a $x \in \mathbb{N}$ - výroková forma (po dosazení na x lit. přír. číslo dostaneme výrok pravdivý, nebo nepravdivý)

Kolik je hodin? Mě! $3+5$ $x+2$

Pravda je přirozené číslo. - výslovné výroky (otázky, přiklady, nemyšlenky, at.)

NEGACE VÝROKU $\neg$ - ozn. $\neg a$ (nikdy $\bar{a}, \sim a, \text{non } a$)

- výrok, který nmitá popínání přirozeného výroku

- má opačnou pravdivostní hodnotu než přerod. výrok

- TVORENÍ: Není pravda, že $\dots$

- ne jinak (ne je), ale je nutné mít do úvahy všechny možnosti

- platí: $\neg(\neg a) = a$

TABULKA HODNOT

a	$\neg a$
1	0
0	1

Příklady

② Neguj (i bez použití háčků)

a : Číslo 8 je liché.

$\neg a$: Není pravda, že číslo 8 je liché.

$\neg a$: $\neg$ je liché.

b : Číslo 8 je kápoň.

$\neg b$: Není pravda, že číslo 8 je kápoň.

$\neg b$: $\neg$ je kápoň (není kápoň).

$\neg b$: $\neg$ je nekápoň

CHYBNÉ! Číslo 8 je hladné (maturantů bytosti $\in \mathbb{Q}$)

③ Neguj bez použití háčků

μ_1 : Číslo 5 je nepárné.

$\neg \mu_1$: Číslo 5 je párné.

μ_2 : $15 > 2$

$\neg \mu_2$: $15 \leq 2$

μ_3 : Číslo 6-9 není hladné.

$\neg \mu_3$: Číslo 6-9 je hladné

μ_4 : $5-8 \geq 4-6$

$\neg \mu_4$: $5-8 < 4-6$

μ_5 : $\sqrt{49} \neq 7$

$\neg \mu_5$: $\sqrt{49} = 7$

2. Složené výroky

SLOŽENÉ VÝROKY - výroky vzniklé spojením dvou (nebo více) jednoduchých výroků pomocí tzv. logických spojek

- KONJUNKCE výroků a, b (zn. $a \wedge b$) [čteme: a a současně b , a a b]
- vznikne spojením výroků spojkou a ve významném slučovacím (přip. a současně, a a zároveň, i, jednak..., přičemž..., ...)
- JE PRAVDIVÁ $\Leftrightarrow$ OBA (VŠECHNY) výroky, jejichž spojením vznikla, jsou PRAVDIVÉ (v ostatních případech je nepravdivá) - viz tabulka PRAVD. HODNOT na další straně

pr. a : jama přijde.
 b : Pavel přijde.

$a \wedge b$: jama přijde a Pavel přijde.
(přijde jama a Pavel)

pr. c : číslo 2 je přirozené.
 d : číslo 2 je prvočíslo.

$c \wedge d$: číslo 2 je přirozené a číslo 2 je prvočíslo.
(číslo 2 je přirozené a prvočíslo)

- DISJUNKCE (ALTERNATIVA) výroků a, b (zn. $a \vee b$) [čteme: a nebo b]
- vznikne spojením výroků spojkou nebo ve významném slučovacím, tj. aluponě jediném
- JE PRAVDIVÁ $\Leftrightarrow$ ALESPŇ JEDEN K výroků a, b je PRAVDIVÝ - viz tabulka

pr. $a \vee b$: jama přijde nebo Pavel přijde. přijde jama nebo Pavel.

$c \vee d$: číslo 2 je přirozené nebo číslo 2 je prvočíslo. číslo 2 je přirozené nebo prvočíslo.

- IMPLIKACE výroků a, b (zn. $a \Rightarrow b$) [čteme: a na pořadí]

- vznikne spojením výroků spojkami: jestliže a, pak b.
(jestliže ..., potom; když ..., pak ...; je-li ..., pak ...)

- čteme: jestliže a , pak b (a implikuje b ; a plyne b ; a je předpoklad, b následek; a je postačující podmínka pro b ; b je nutná podmínka pro a)

- JE PRAVDIVÁ $\Leftrightarrow$ OBA VÝROKY PRAVDIVÉ nebo PRVNÍ VÝROK NEPRAVDIVÝ
(když JE NEPRAVDIVÁ $\Leftrightarrow$ PRVNÍ VÝROK PRAVDIVÝ (1) a DRUHÝ NEPRAVDIVÝ (0), tj. když a pravdy plyne nepravda; v ostatních případech pravda)

pr. $a \Rightarrow b$: jestliže přijde jama, (pak) přijde Pavel.

přijde-li jama, (pak) přijde Pavel. [! Pavel přijde, přijde-li jama.]

PŘEDPOKLAD

ZÁVĚR

ZÁVĚR

PŘEDPOKLAD

pr. $b \Rightarrow a$: přijde-li Pavel, (pak) přijde jama.

- OBŘÁCENÁ IMPLIKACE $b \Rightarrow a$

- nemusí mít stejnou pravdiv. hodnotu jako $a \Rightarrow b$

- OBMĚNĚNÁ IMPLIKACE $\neg b \Rightarrow \neg a$

- MÁ STEJNOU pravd. hodnotu jako $a \Rightarrow b$ [uklív: NEPŘÍMÝ DŮKAZ]

pr. $a \Rightarrow b$: jestliže je daný Δ komotamenný, pak je komotamenný. [$ph = 1$]

$b \Rightarrow a$: jestliže je daný Δ komotamenný, pak je komotamenný. [$ph = 0$]

$\neg b \Rightarrow \neg a$: jestliže daný Δ není komotamenný, pak není komotamenný.

[$ph = 1$]

- EKVIVALENCE výroků a, b (zn. $a \Leftrightarrow b$)

- jde vlastně o konjunkci implikací $a \Rightarrow b$ a obrácení implikace $b \Rightarrow a$
- rovnoběžné spojení výroků spojkami $\Leftrightarrow$, právě tehdy, když $\Leftrightarrow$ (právě, když; tehdy a jen tehdy, když; pouze tehdy, když; když)
- ekv. a je absolutní s b ; a platí tehdy, když platí b (nědy: a je nutná a postačující podmínka pro b)
- JE PRAVDIVÁ $\Leftrightarrow$ OBA výroky HAJÍ STEJNOU PRAVDIVOSTNÍ HODNOTU (tj. oba výroky jsou současně pravdivé, nebo oba nepravdivé)

(př.) $a \Leftrightarrow b$: para přijde právě tehdy, když přijde park.
 $c \Leftrightarrow d$: číslo 2 je přirozené právě, když je číslo 2 prvočíslo.

(př.) Vyrovnání složitých výroků, je-li

- a : Venku pešl. b : Venku fouká větr.
- $a \wedge b$: Venku pešl. a fouká větr.
- $a \vee b$: Venku pešl. nebo fouká větr.
- $a \Rightarrow b$: pokud venku pešl., pak fouká větr.
- $b \Rightarrow a$: pokud venku fouká větr., pak pešl.
- $\neg b \Rightarrow \neg a$: pokud venku nefouká větr., pak nepešl.
- $a \Leftrightarrow b$: Venku pešl. právě tehdy, když fouká větr.

TABULKA PRAVDIVOSTNÍCH HODNOT (nutno mít správně) NEGACE

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$$\begin{aligned}
 a) \neg(a \wedge b) &= \neg a \vee \neg b \\
 b) \neg(a \vee b) &= \neg a \wedge \neg b \\
 c) \neg(a \Rightarrow b) &= a \wedge \neg b \\
 d) \neg(a \Leftrightarrow b) &= a \Leftrightarrow \neg b \quad \textcircled{1} \\
 &= \neg a \Leftrightarrow b \quad \textcircled{2} \\
 &= \neg[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)] = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \quad \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

VÝROKOVÁ FORMULE - logické spojné věty výroků pomocí háček a logických operací ($\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$)

- PRIORITY LOGICKÝCH OPERACÍ

1. operaci v háčcích mají přednost
2. nejvyšší prioritou (poté) operací, pokud nejsou háčky: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

(př.) $\neg(p \wedge q)$... nejprve $p \wedge q$, pak $\neg$ (př.) $p \vee \neg q$... nejprve $\neg q$, pak $\vee$

TAUTOLOGIE - složitý výrok, který je pravdivý pro všechny pravdivostní hodnoty svých jednoduchých (jednotlivých) výroků

KONTRADIKCE - složitý výrok, který je nepravdivý pro všechny pravdivostní hodnoty svých jednoduchých výroků

Příklady

① Doplňte tabulku pravdivostních hodnot

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge b$	$a \vee \neg b$	$a \Rightarrow \neg b$	$a \Rightarrow (\neg a \wedge b)$	$a \Leftrightarrow (a \vee \neg b)$
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0

② Doplňte

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \Rightarrow \neg b$	$(\neg a \Rightarrow \neg b) \wedge a$	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a \Leftrightarrow \neg b$
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0

③ Rozhodněte, zda se jedná o tautologii: a) $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

TAUTOLOGIE

b) $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow a \wedge \neg b$

a	b	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$a \wedge \neg b$	$\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow a \wedge \neg b$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

TAUTOLOGIE

stejně platí - lze nahradit jedinými slovy - jsou ekvivalentní

④ Ujistěte, zda jsou $\neg(a \Leftrightarrow b)$, $a \Leftrightarrow \neg b$, $\neg a \Leftrightarrow b$ mezi se sebou pravdivostními hodnotami a, b stejné pravdivostní hodnoty

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \Leftrightarrow b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$a \Leftrightarrow \neg b$	$\neg a \Leftrightarrow b$
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0

MAJÍ - lze nahradit jedinými slovy

Lze nahradit výrok $\neg(a \Leftrightarrow b)$ výrokem $a \Leftrightarrow \neg b$, příp $\neg a \Leftrightarrow b$?

⑤ Napište složenní výroky, přiči i mlatky, podle kterých budete mgorat.

$\mathcal{N}_1$: Máme pivo $\wedge$ miniválky. $\mathcal{T}(a \wedge b) = \mathcal{T}a \wedge \mathcal{T}b$ KONJUNKCE

$\mathcal{T}\mathcal{N}_1$: Nemáme pivo $\vee$ nemáme miniválky. (Nemáme pivo nebo miniválky)

$\mathcal{N}_2$: Osvečím se čajm $\vee$ kávou. $\mathcal{T}(a \vee b) = \mathcal{T}a \wedge \mathcal{T}b$ DISJUNKCE

$\mathcal{T}\mathcal{N}_2$: Neosvečím se čajm $\wedge$ neosvečím se kávou. (Neosvečím se čajm ani kávou)

$\mathcal{N}_3$: Jestliže budu jíst reptor, ^{nebo} budu pít pivo. $\mathcal{T}(a \Rightarrow b) = a \wedge \mathcal{T}b$ IMPLIKACE

$\mathcal{T}\mathcal{N}_3$: Budu jíst reptor $\wedge$ nebudu pít pivo. [POZOR! CHYBNĚ! ~~Jestliže~~ budu pít reptor, nebudu pít pivo.]

$\mathcal{N}_4$: Budu kloušm $\wedge$ právě tehdy, když nemám domácí úkol. EQUIVALENCE (nebo, nebo-li)

$\mathcal{T}\mathcal{N}_4$: $\mathcal{T}(a \Leftrightarrow b) = \mathcal{T}a \Leftrightarrow \mathcal{T}b$ nebudu kloušm právě tehdy, když nemám dom. úkol.

$\mathcal{T}(a \Leftrightarrow b) = a \Leftrightarrow \mathcal{T}b$ Budu kloušm právě tehdy, když mám domácí úkol.

$\mathcal{T}(a \Leftrightarrow b) = \mathcal{T}[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)] = \mathcal{T}(a \Rightarrow b) \wedge \mathcal{T}(b \Rightarrow a) = (a \wedge \mathcal{T}b) \wedge (\mathcal{T}a \wedge b)$

Budu kloušm a mám domácí úkol nebo nemám domácí úkol a nebudu kloušm. ne přehodit

[nejjednodušší jsou 1. a 2. zp., 3. zp. myslím k tomu, že ukázané je obousměrná implikace - také možno sledit pro důkaz]

$\mathcal{N}_5$: Jestliže nemám peníze, ^{nebo} nemůžu nakupovat. $\mathcal{T}(a \Rightarrow b) = a \wedge \mathcal{T}b$

$\mathcal{T}\mathcal{N}_5$: Nemám peníze a můžu nakupovat.

$\mathcal{N}_6$: Válek s mloky maptal k. Čapka $\vee$ a. Jirásek. $\mathcal{T}(a \vee b) = \mathcal{T}a \wedge \mathcal{T}b$

$\mathcal{T}\mathcal{N}_6$: Válek s mloky nemaptal k. Čapka a ani a. Jirásek.

$\mathcal{N}_7$: Mozart ani Beethoven nejsou čísla skladatelů. $\mathcal{T}(a \wedge b) = \mathcal{T}a \wedge \mathcal{T}b$

$\mathcal{T}\mathcal{N}_7$: Mozart nebo Beethoven jsou čísla skladatelů.

⑥ Kteří mgora výrok:

a) Číslo 158 je dělitelné šesti $\wedge$ právě tehdy, když je dělitelné dvěma $\wedge$ třemi.

$\mathcal{T}[a \Leftrightarrow (b \wedge c)] = \mathcal{T}a \Leftrightarrow (\mathcal{T}b \wedge \mathcal{T}c)$ NEBO $\mathcal{T}a \Leftrightarrow \mathcal{T}(b \wedge c) = a \Leftrightarrow (\mathcal{T}b \wedge \mathcal{T}c)$ NEBOVAT ne i jinak

mgora:

① mghodnící: Číslo 158 není dělitelné 6 právě tehdy, když je dělitelné 2 a 3.

② srušit: Číslo 158 je dělitelné 6 právě tehdy, když není dělitelné 2 nebo 3.

b) ^{jestliže} $\mathcal{T}a$ číslo iracionální, ^{nebo} je iracionální číslo $1 + \mathcal{T}a$. $\mathcal{T}(a \Rightarrow b) = a \wedge \mathcal{T}b$

mgora: Číslo $\mathcal{T}a$ je iracionální a číslo $1 + \mathcal{T}a$ není iracionální.